Ein Gauß-Kusmin-Lévy-Satz für die singulären Kettenbrüche im Sinn von HURWITZ

Rieger, G.J.

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 28, 1977, S.81-88

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Ein Gauß-Kusmin-Lévy-Satz für die singulären Kettenbrüche im Sinn von HURWITZ

Von **G.J. Rieger**

Vorgelegt von Theodor Kaluza

Unter den halbregelmäßigen Kettenbrüchen sind die eng miteinander zusammenhängenden Kettenbrüche nach nächsten Ganzen und die singulären Kettenbrüche besonders interessant; ihre elementare Theorie verdankt man HURWITZ (vgl. etwa [1], § 44). Das Ziel dieser Note ist es, einen Satz über singuläre Kettenbrüche zu beweisen (Satz 5), der dem berühmten Satz von Gauß-Kusmin-Lévy bei den üblichen Kettenbrüchen (also denen nach größten Ganzen)[1]) und einem ähnlichen Satz bei den Kettenbrüchen nach nächsten Ganzen[2]) entspricht.

In § 1 stellen wir geläufige Dinge über singuläre Kettenbrüche zusammen (vgl. wieder [1], § 44). In § 2 geht es um Lösbarkeit der Rekursionsformeln für H_n. In § 3 wird die Konvergenz der Hilfsfunktionen γ_n gegen 0 bewiesen. Das führt in § 4 auf die gewünschte Konvergenz der H_n.

Kleine lateinische Buchstaben bedeuten ganzrationale Zahlen. Für $\xi \in \mathbb{R}$ bezeichne $[\xi]$ das größte Ganze von ξ.

---

1) Vgl. etwa [3] und [4].

2) Vgl. [2].

§ 1. Geläufiges über singuläre Kettenbrüche

Es sei

$$(1.1) \qquad \varepsilon_j \in \{-1, 1\}, \quad k_j \geqq 2, \quad \varepsilon_j + k_j \geqq 2 \qquad (j \geqq 1);$$

dann heißt

$$k_0 + \cfrac{\varepsilon_1}{k_1 + \cfrac{\varepsilon_2}{k_2 + \ddots}}$$

singulärer Kettenbruch. Wenn man von abzählbar vielen Ausnahmen absieht, läßt sich jede reelle Zahl auf genau eine Weise als nicht abbrechender singulärer Kettenbruch schreiben. Die Menge $\mathbf{A}$ der Ausnahmen besteht genau aus den rationalen Zahlen, für die der singuläre Kettenbruch abbricht, und aus den zu $G := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ „äquivalenten" Zahlen, für die die Eindeutigkeit verletzt ist. Es sei $\beta := 2 - G$. Für $\xi_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{A}$ ist

$$k_0 = [\xi_0 + \beta], \quad \varepsilon_1 = \operatorname{sgn}(\xi_0 - k_0), \ \xi_1 := \frac{\varepsilon_1}{\xi_0 - k_0},$$

$$k_1 = [\xi_1 + \beta], \quad \varepsilon_2 = \operatorname{sgn}(\xi_1 - k_1), \ \xi_2 := \frac{\varepsilon_2}{\xi_1 - k_1}, \ \ldots .$$

Es sei $Y :=]-\beta, 1-\beta[\setminus \mathbf{A}$. Für $\xi \in Y$ ist $k_0 = 0$. Mittels

$$\xi = \frac{\varepsilon_1}{k_1 + T(\xi)}$$

ist eine Abbildung $T\colon Y \longrightarrow Y$ erklärt; T heißt Shiftoperator. Für $n \geqq 0$ ist

$$T^n(\xi) = \frac{\varepsilon_{n+1}}{k_{n+1} + T^{n+1}(\xi)}.$$

§ 2. Die Funktionen H_n

Es bezeichne λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $0 \leqq \alpha \leqq 1$ sei

$$H_n(\alpha) := \lambda\ \{\xi \in Y\colon -\beta < T^n(\xi) < \alpha - \beta\};$$

es ist

(2.1) $\quad H_0(\alpha) = \alpha; \quad H_n(0) = 0 \ (n \geqq 0), \quad H_n(1) = 1 \ (n \geqq 0);$

für $0 \leqq \alpha \leqq \alpha' \leqq 1$ ist

(2.2) $\quad H_n(\alpha') - H_n(\alpha) = \lambda\ \{\xi \in Y\colon \alpha - \beta < T^n(\xi) < \alpha' - \beta\}.$

Für $n \geqq 0$, $0 \leqq \alpha \leqq 1$ gilt

$$-\beta < T^{n+1}(\xi) < \alpha - \beta,$$

wenn und nur wenn für gewisse ε, k mit

(2.3) $\quad \varepsilon \in \{-1, 1\}, \ k \geqq 2, \ \varepsilon + k \geqq 2 \qquad$ (wegen (1.1))

gilt

$$\frac{1}{k-\beta+\alpha} < T^n(\xi) < \frac{1}{k-\beta} \qquad \text{falls } \varepsilon = 1,$$

$$\frac{-1}{k-\beta} < T^n(\xi) < \frac{-1}{k-\beta+\alpha} \qquad \text{falls } \varepsilon = -1;$$

wegen (2.2) und (2.3) folgt

$$\begin{aligned} H_{n+1}(\alpha) = {} & \sum_{k \geqq 2} \left(H_n\left(\beta + \frac{1}{k-\beta}\right) - H_n\left(\beta + \frac{1}{k-\beta+\alpha}\right)\right) \\ & + \sum_{k \geqq 3} \left(H_n\left(\beta - \frac{1}{k-\beta+\alpha}\right) - H_n\left(\beta - \frac{1}{k-\beta}\right)\right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Falls die Folge der Funktionen H_n gegen eine Funktion H konvergiert, muß wegen (2.1) und (2.4) gelten

$$\text{(2.5)}\qquad \begin{aligned} H(\alpha) = {} & H(\beta+\frac{1}{2-\beta}) - H(\beta+\frac{1}{2-\beta+\alpha}) + \sum_{k\geqq 3}\Big(\big(H(\beta+\frac{1}{k-\beta}) - \\ & - H(\beta+\frac{1}{k-\beta+\alpha})\big) + \big(H(\beta-\frac{1}{k-\beta+\alpha}) - H(\beta-\frac{1}{k-\beta})\big)\Big). \end{aligned}$$

$$\text{(2.6)}\qquad H(0) = 0,\ H(1) = 1.$$

Falls außerdem $K(\alpha) := H'(\alpha)$ existiert, muß wegen (2.5) gelten

$$\text{(2.7)}\qquad \begin{aligned} K(\alpha) = {} & K(\beta+\frac{1}{2-\beta+\alpha})\ (2-\beta+\alpha)^{-2} + \sum_{k\geqq 3}\big(K(\beta+\frac{1}{k-\beta+\alpha}) \\ & + K(\beta-\frac{1}{k-\beta+\alpha})\big)\ (k-\beta+\alpha)^{-2}. \end{aligned}$$

Daß es solche Funktionen H, K gibt, lehren Satz 1 und Satz 2; daß es keine anderen solche Funktionen H (und damit K) gibt, lehrt schließlich Satz 5.

Satz 1. *Die Funktion* $H(\alpha) := (\log G)^{-1} \log \frac{G+\alpha}{G}$ $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$ *erfüllt (2.5) und (2.6).*

Beweis. Wegen $G^2 = G+1$ ist (2.6) klar. Es genügt, (2.5) für $\log \frac{G+\alpha}{G}$ statt $H(\alpha)$ zu verifizieren. Dazu wenden wir die Exponentialfunktion auf (2.5) an, und wegen $G+\beta = 2$ folgt das Gewünschte aus

$$\frac{2+\frac{1}{2-\beta}}{2+\frac{1}{2-\beta+\alpha}} \prod_{k\geqq 3}\left(\frac{2+\frac{1}{k-\beta}}{2+\frac{1}{k-\beta+\alpha}} \cdot \frac{2-\frac{1}{k-\beta+\alpha}}{2-\frac{1}{k-\beta}}\right)$$

$$= \frac{2-\beta+\alpha}{2-\beta} \cdot \frac{\frac{5}{2}-\beta}{\frac{5}{2}-\beta+\alpha} \cdot \prod_{k\geqq 3} \frac{k-\beta+\alpha-\frac{1}{2}}{k-\beta-\frac{1}{2}} \cdot \frac{k-\beta+\frac{1}{2}}{k-\beta+\alpha+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{5}{2}-\beta}{\frac{5}{2}-\beta+\alpha} \cdot \frac{2-\beta+\alpha}{2-\beta} \cdot \frac{\frac{5}{2}-\beta+\alpha}{\frac{5}{2}-\beta} = \frac{G+\alpha}{G}.$$

Aus Satz 1 folgt durch Differentiation sofort

Satz 2. *Es sei* $C \in \mathbb{R}$; *die Funktion* $K(\alpha) = \frac{C}{G+\alpha}$ $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$ *erfüllt (2.7).*

Wir wollen zunächst den weitęren Gang skizzieren. Wegen der gewünschten Konvergenz

$$H_n(\alpha) \longrightarrow (\log G)^{-1} \log \frac{G+\alpha}{G} \qquad (n \longrightarrow \infty)$$

erwartet man

$$H_n'(\alpha)\,(G+\alpha) \longrightarrow (\log G)^{-1} \qquad (n \longrightarrow \infty),$$
$$\big(H_n'(\alpha)\,(G+\alpha)\big)' \longrightarrow 0 \qquad (n \longrightarrow \infty).$$

In der Tat beweist man diese drei Konvergenzen in der umgekehrten Reihenfolge (Satz 5, (4.2), Satz 3).

§ 3. Die Konvergenz der γ_n

Für $2 \leqq k \in \mathbb{Z}$, $0 \leqq \alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$\text{(3.1)} \qquad \begin{aligned} A_k(\alpha) &:= \frac{2-\beta+\alpha}{2(k-\beta+\alpha)+1} \cdot \frac{1}{k-\beta+\alpha}, \\ B_k(\alpha) &:= \frac{2-\beta+\alpha}{2(k-\beta+\alpha)-1} \cdot \frac{1}{k-\beta+\alpha}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{1}{2\sigma+1} \cdot \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} - \frac{2}{2\sigma+1}, \quad \frac{1}{2\sigma-1} \cdot \frac{1}{\sigma} = \frac{2}{2\sigma-1} - \frac{1}{\sigma} \qquad (0 < \sigma \in \mathbb{R})$$

gilt

$$\text{(3.2)} \qquad \sum_{k \geqq 2} A_k(\alpha) + \sum_{k \geqq 3} B_k(\alpha) = 1 \qquad (0 \leqq \alpha \in \mathbb{R}).$$

Es sei γ_0 eine für $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $0 \leqq \alpha \leqq 1$ erklärte, reellwertige, stetig differenzierbare Funktion; die Funktionen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ werden jetzt rekursiv durch eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe erklärt, und zwar sei

$$\text{(3.3)} \qquad \begin{aligned} \gamma_{n+1}(\alpha) := & \sum_{k \geqq 2} \gamma_n\Big(\beta + \frac{1}{k-\beta+\alpha}\Big) A_k(\alpha) \\ & + \sum_{k \geqq 3} \gamma_n\Big(\beta - \frac{1}{k-\beta+\alpha}\Big) B_k(\alpha) \qquad (0 \leqq \alpha \leqq 1). \end{aligned}$$

Aus (2.4) folgt wegen (3.1) sofort

Satz 3. *Für* $n \geqq 0$ *und* $\gamma_n(\alpha) := (2-\beta+\alpha)\,H_n'(\alpha)$ $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$ *ist (3.3) erfüllt.*

Durch Differentiation in (3.3) entsteht eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe; daher ist

$$\text{(3.4)} \qquad \begin{aligned} \gamma_{n+1}'(\alpha) = & - \sum_{k \geqq 2} \gamma_n'\Big(\beta + \frac{1}{k-\beta+\alpha}\Big) A_k(\alpha)\,(k-\beta+\alpha)^{-2} \\ & + \sum_{k \geqq 3} \gamma_n'\Big(\beta - \frac{1}{k-\beta+\alpha}\Big) B_k(\alpha)\,(k-\beta+\alpha)^{-2} \end{aligned}$$

$$+\sum_{k\geqq 2}\gamma_n\Big(\beta+\frac{1}{k-\beta+\alpha}\Big)A_k'(\alpha)+\sum_{k\geqq 3}\gamma_n\Big(\beta-\frac{1}{k-\beta+\alpha}\Big)B_k'(\alpha)$$

$$(0\leqq\alpha\leqq 1).$$

Es ist

$$A_k'(\alpha)=\frac{(k-2)\cdot(2k-3)-2\cdot(2-\beta+\alpha)^2}{(2(k-\beta+\alpha)+1)^2\,(k-\beta+\alpha)^2},$$

$$B_k'(\alpha)=\frac{(k-2)\cdot(2k-5)-2\cdot(2-\beta+\alpha)^2}{(2(k-\beta+\alpha)-1)^2\,(k-\beta+\alpha)^2}.$$

Wegen (3.2) ist

$$\sum_{k\geqq 2}A_k'(\alpha)+\sum_{k\geqq 3}B_k'(\alpha)=0 \qquad (0\leqq\alpha\leqq 1);$$

diese Gleichung multiplizieren wir mit $\gamma_n(\beta)$ und subtrahieren das Ergebnis von (3.4); nach dem Mittelwertsatz erhält man für gewisse reelle Zahlen $\vartheta_k^{(1)}$, $\vartheta_k^{(2)}$ mit $0<\vartheta_k^{(1)}<1$, $0<\vartheta_k^{(2)}<1$ sofort

$$\gamma_{n+1}'(\alpha)=-\sum_{k\geqq 2}\gamma_n'\Big(\beta+\frac{1}{k-\beta+\alpha}\Big)A_k(\alpha)\,(k-\beta+\alpha)^{-2}$$

$$+\sum_{k\geqq 3}\gamma_n'\Big(\beta-\frac{1}{k-\beta+\alpha}\Big)B_k(\alpha)\,(k-\beta+\alpha)^{-2}$$

$$+\sum_{k\geqq 2}\gamma_n'(\vartheta_k^{(1)})\frac{A_k'(\alpha)}{k-\beta+\alpha}+\sum_{k\geqq 3}\gamma_n'(\vartheta_k^{(2)})\frac{B_k'(\alpha)}{k-\beta+\alpha} \qquad (0\leqq\alpha\leqq 1).$$

Für $n\geqq 0$ sei

(3.5) $$M_n:=\sup_{0\leqq\alpha\leqq 1}|\gamma_n'(\alpha)|.$$

Für $0\leqq\alpha\leqq 1$ folgt

$$|\gamma_{n+1}'(\alpha)|\leqq M_n\Big(\sum_{k\geqq 2}A_k(\alpha)\,(k-\beta+\alpha)^{-2}+\sum_{k\geqq 3}B_k(\alpha)\,(k-\beta+\alpha)^{-2}$$

$$+\sum_{k\geqq 2}\frac{|A_k'(\alpha)|}{k-\beta+\alpha}+\sum_{k\geqq 3}\frac{|B_k'(\alpha)|}{k-\beta+\alpha}\Big).$$

Für

$$S(\alpha):=\sum_{k\geqq 2}A_k(\alpha)\,(k-\beta+\alpha)^{-2}+\sum_{k\geqq 3}B_k(\alpha)\,(k+\beta-\alpha)^{-2}$$

folgt wegen $(k-\beta+\alpha)^{-2}\leqq G^{-2}$ und wegen (3.2) sofort

(3.6) $$S(\alpha)<G^{-2}.$$

Es folgt

$$|\gamma_{n+1}'(\alpha)|\leqq M_n\Big(G^{-2}+\sum_{k\geqq 2}\frac{|A_k'(\alpha)|}{k-\beta+\alpha}+\sum_{k\geqq 3}\frac{|B_k'(\alpha)|}{k-\beta+\alpha}\Big).$$

Die Fibonacci-Zahlen a_k ($k \in \mathbb{Z}$) sind erklärt vermöge

$$a_0 := 0,\ a_1 := 1,\ a_k := a_{k-2} + a_{k-1}\ (k \geqq 2),\quad a_{k-2} := a_k - a_{k-1}\ (k \leqq 1).$$

So hat man

k	...−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10...
a_k	... 5	−3	2	−1	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55...

Induktion ergibt $a_{-k} = (-1)^{k-1} a_k$ ($k \in \mathbb{Z}$). Wegen $G^2 = 1+G$ folgt durch Induktion sofort

$$G^k = a_{k-1} + a_k G \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

So ist etwa $1+2G = G^3$.

Für $0 \leqq \alpha \leqq 1$ ist

$$|A_2'(\alpha)| \leqq |A_2'(0)| = 2(1+2G)^{-2} = 2G^{-6},\ 2-\beta+\alpha \geqq G,$$
$$|B_3'(\alpha)| \leqq |B_3'(0)| = G^{-7},\ 3-\beta+\alpha \geqq G^2.$$

Einsetzen ergibt

$$|\gamma_{n+1}'(\alpha)| \leqq M_n\Big(G^{-2}+2G^{-7}+G^{-9}+\frac{1}{1+G}\sum_{k\geqq 3}|A_k'(\alpha)|+\frac{1}{2+G}\sum_{k\geqq 4}|B_k'(\alpha)|\Big). \tag{3.7}$$

Mit der obigen Tabelle findet man

$$G^{-2} + 2G^{-7} + G^{-9} = 59G - 95. \tag{3.8}$$

Hilfssatz 1. *Für* $0 \leqq \alpha \leqq 1$ *gilt*

$$|A_k'(\alpha)| < \frac{1}{2k(k+1)}\ (k \geqq 3),\quad |B_k'(\alpha)| < \frac{1}{2(k-1)k}\ (k \geqq 4).$$

Beweis. Zur Abschätzung von A_3' und von B_4' setzen wir im Zähler $\alpha = 1$ und im Nenner $\alpha = 0$, und es kommt

$$|A_3'(\alpha)| \leqq \frac{2(G+1)^2-3}{(2G+3)^2(G+1)^2} < \frac{1}{24},$$
$$|B_4'(\alpha)| \leqq \frac{2(G+1)^2-6}{(2G+3)^2(G+1)^2} < \frac{1}{66}.$$

In allen anderen Fällen setzen wir $\alpha = 0$ im Zähler und im Nenner, und es kommt

$$|A_k'(\alpha)| \leqq \frac{(k-2)(2k-3)-2G^2}{(2k+2G-3)^2(k+G-2)^2} \qquad (k \geqq 4),$$
$$|B_k'(\alpha)| \leqq \frac{(k-2)(2k-5)-2G^2}{(2k+2G-5)^2(k+G-2)^2} \qquad (k \geqq 5).$$

Darin beachte man etwa $2G > 3$ und $2G^2\ (>5) > 0$.

Aus Hilfssatz 1 folgt

$$\sum_{k\geqq 3}|A_k'(\alpha)| < \frac{1}{6}, \quad \sum_{k\geqq 4}|B_k'(\alpha)| < \frac{1}{6}.$$

Mit (3.5), (3.7), (3.8) erhält man

$$M_{n+1} \leqq M_n \left(59G - 95 + \frac{2-G}{6} + \frac{3-G}{30}\right). \tag{3.9}$$

Die Klammer ist kleiner als 0,574. Folglich ist

$$M_{n+1} \leqq \frac{3}{5} M_n \qquad (n \geqq 0).$$

Damit haben wir

Satz 4. *Es sei* γ_0 *eine für* $\alpha \in \mathbb{R}$ *mit* $0 \leqq \alpha \leqq 1$ *erklärte, reellwertige, stetig differenzierbare Funktion; die Funktionen* $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ *seien durch (3.3) erklärt; für (3.5) gilt dann*

$$M_n \leqq \left(\frac{3}{5}\right)^n M_0.$$

§ 4. Die Konvergenz der H_n

Wegen Satz 3 gilt Satz 4 insbesondere für $\gamma_n(\alpha) = (G+\alpha)\, H'(\alpha)$, und wegen (2.1) kann $M_0 = G+1$ gewählt werden; zusammen mit dem Mittelwertsatz folgt

$$|(G+\alpha)\, H_n'(\alpha) - G\, H_n'(0)| \leqq \left(\frac{3}{5}\right)^n (1+G) \qquad (0 \leqq \alpha \leqq 1,\ n \geqq 0).$$

Mit $C_n := G\, H_n'(0)$ schreiben wir dafür

$$H_n'(\alpha) = C_n (G+\alpha)^{-1} + O\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n\right) \qquad (0 \leqq \alpha \leqq 1,\ n \geqq 0). \tag{4.1}$$

Wegen (2.1) folgt daraus

$$1 = H_n(1) - H_n(0) = \int_0^1 H_n'(\alpha)\, d\alpha = C_n \log G + O\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n\right) \qquad (n \geqq 0).$$

Einsetzen in (4.1) ergibt

$$H_n'(\alpha) = \big((G+\alpha) \log G\big)^{-1} + O\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n\right). \tag{4.2}$$

Daraus folgt weiter

Satz 5. *Für* $0 \leqq n \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leqq \alpha \leqq 1$ *gilt*

$$H_n(\alpha) = \frac{\log \frac{G+\alpha}{G}}{\log G} + O\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n\right).$$

Man kann (3.6) verschärfen. So ist

$$\begin{aligned} S(\alpha) &\leqq A_2(\alpha)\,(G+\alpha)^{-2} + (1+G+\alpha)^{-2} \Big(\sum_{k \geqq 3} \big(A_k(\alpha) + B_k(\alpha)\big)\Big) \\ &= A_2(\alpha)\,\big((G+\alpha)^{-2} - (1+G+\alpha)^{-2}\big) + (1+G+\alpha)^{-2} \qquad \big(\text{wegen } (2.3)\big) \\ &\leqq A_2(0)\,\big(G^{-2} + (1+G)^{-2}\big) + (1+G)^{-2} \\ &= G^{-5} - G^{-7} + G^{-4} = 18 - 11\,G. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Statt (3.6) verwenden wir (4.3); statt (3.9) kommt dann

$$M_{n+1} \leqq M_n \left(49\, G - 79 + \frac{2-G}{6} + \frac{3-G}{30}\right).$$

Die Klammer ist kleiner als 0,394. Insbesondere gilt Satz 5 mit $\frac{2}{5}$ statt $\frac{3}{5}$. Das läßt sich weiter verschärfen.

Satz 5 kann als Ausgangspunkt für eine metrische Theorie der singulären Kettenbrüche dienen. Hier spielt dann vieles aus der Stochastik herein wie Ergodizität und Mischungseigenschaften. Wir gehen darauf hier nicht näher ein.

Literatur

[1] O. PERRON, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Teubner, Stuttgart 1954, 3. Aufl.

[2] G. J. RIEGER, Ein Gauß-Kusmin-Lévy-Satz für Kettenbrüche nach nächsten Ganzen. Manuscripta Math. (im Druck).

[3] P. SZÜSZ, Über einen Kusminischen Satz. Acta Math. Acad. Sci. Hung. **12** (1961), S. 447–453.

[4] Eduard WIRSING, On a theorem of Gauss-Kuzmin-Lévy and a Frobenius-type theorem for function spaces. Acta Arithmetica **24** (1974), S. 507–516.